MA2 – „písemná" přednáška 15. 4. 2020

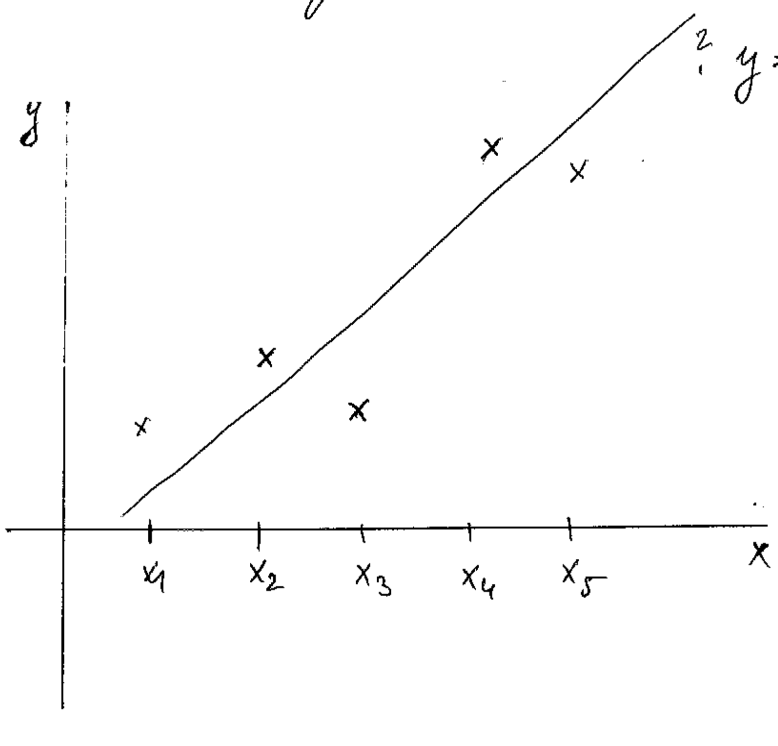
Extrémy funkcí více (u „nás" spec. dvou) proměnných

Vyšetřování extrémů funkcí více proměnných je důležité v mnohých aplikacích – uvedeme si na úvod dva příklady, které vyřešíme zanedlouho, až budeme „vědět", jak.

1. Máme za úkol najít rozměry vany tvaru hranolu tak, aby povrch (bez víka) vany byl minimální, když je dán objem vany V.

2. Metoda „nejmenších čtverců"

   Měříme opakovaně veličinu $y = y(x)$ a předpokládáme, že $y(x)$ je lineární funkce, tj. $y = ax + b$ – a otázka: jak „najít" koeficienty a, b tak, aby hodnoty vypočtené, (tj. $y(x) = ax + b$), byly „co nejblíže" těm hodnotám naměřeným?



? $y = ax + b$ – zde je třeba

1) definovat, co znamená „nejblíže"

2) a pak to „umět najít"

Začneme „slovníkem" – tj. definicemi potřebných pojmů (a srovnejte s pojmy při vyšetřování extrémů funkce jedné proměnné v MA1)

V MA1 ($f: M \subset R \to R$) jsme měli:

1) globální extrém (maximum, minimum) fce f na M;
2) lokální extrém fce (spec. ostrý lokální extrém) v $x_0 \in M$, x_0 – vnitřní bod M;
3) existence extrémů + metody nalezení extrémů globálních i lokálních.

Nyní: $f: G \subset R^n \to R$:

Definice: $f: G \subset R^n \to R$; řekneme, že f nabývá v bodě $X_M \in G$ (resp. $X_m \in G$) svého globálního maxima (resp. minima), když platí: $\forall x \in G: f(x) \leqq f(X_M)$ (resp. $f(x) \geqq f(X_m)$)

Příklady:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $G = R^2$:

$f(x,y) \geqq 0$ v R^2, $f(0,0) = 0$ $\Rightarrow$ f nabývá v bodě $(0,0)$ svého globálního minima ($=0$) v G

$f(x,0) = x^2$ a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x,0) = +\infty$ $\Rightarrow$ f nemá na G globální maximum (analogicky jako u fcí jedné proměnné)

2) $f(x,y) = x^2+y^2$, $G = \{(x,y) = x^2+y^2 \leqq 4\}$

(množina G je omezená a uzavřená, tedy kompaktní –
– G je kruh o středu v $(0,0)$ a poloměru $r=2$ (včetně hranice))
globální minimum má f „stačí" v bodě $(0,0)$, a globální maximum je na „celé" kružnici $x^2+y^2=4$, neboť pro vnitřní body $(x,y) \in G^0$ je $x^2+y^2<4$, a na kružnici $x^2+y^2=4$ je $f(x,y) = x^2+y^2 = 4$.

3) „obrácené": $f(x,y) = 4-(x^2+y^2)$:

(i) $G = R^2$; f má na R^2 globální maximum v $(0,0)$ $(=4)$ a nemá globální minimum $\left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = -\infty\right)$

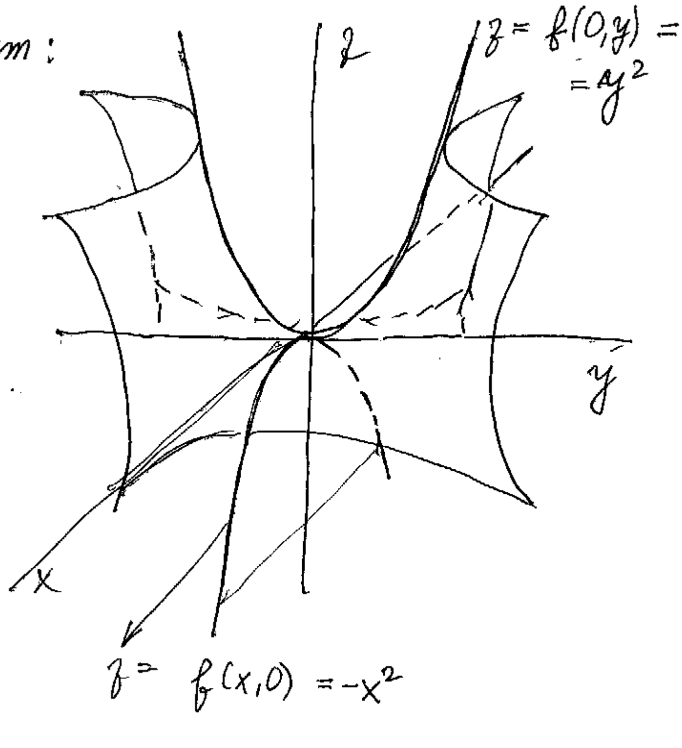
(ii) na $G = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ má f globální maximum (stačí) v bodě $(0,0)$, a globální minimum na kružnici $x^2+y^2=1$ (ve všech bodech kružnice), kde je $f(x,y) = 4-1 = 3$

4) a) $f(x,y) = y^2-x^2$ (t.zv. sedlová plocha – viz neumělý náčrtek),
$G = R^2$

f nemá na R^2 ani globální maximum ani globální minimum:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = -\infty$$

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = +\infty$$



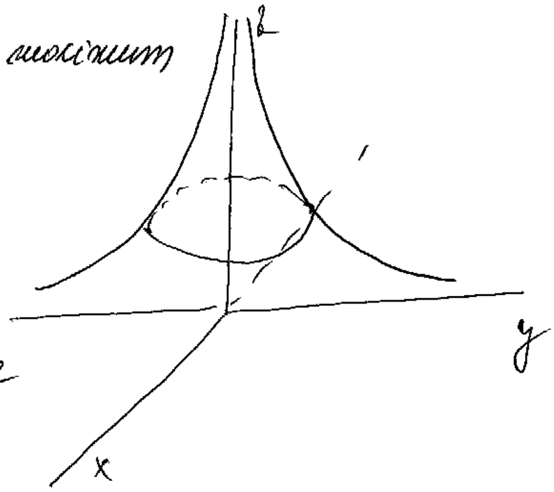
4) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

f – nemá v G ani globální maximum ani globální minimum;

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=+\infty$ a

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0)=0$, přičemž ale

je $f(x,y)>0$!



Ale jistě!:

5) $f(x,y)=x^2+y^2$; $G=\{(x,y);\ x^2+y^2<4\}$ –

G je sice omezená, ale je otevřená množina – f má na G globální minimum v $(0,0)$ ($f(0,0)=0$), ale globálního maxima v G nenabývá! Když $x^2+y^2\to 4$, pak $f(x,y)=x^2+y^2\to 4$, ale hodnoty 4 nikdy nenabyde (z definice limity plyne, že nemůže existovat $X_M\in G$ tak, že $f(X_M)<4$ a $f(x,y)\leqq f(X_M)$)

6) a „naopak“: $f(x,y)=y^2-x^2$ na $G=\{(x,y);\ x^2+y^2\leqq 1\}$.
(G – kompaktní množina) – zde je „vidět“, že $f(x,y)$ bude mít globální maximum na parabole $z=y^2(=f(0,y))$; pak $f(0,y)$ bude maximální na hranici G pro $y=\pm 1$, tj. f bude mít globální maximum $f(0,-1)=f(0,1)=1$, a f bude „nejmenší“ na parabole $z=-x^2(=f(x,0))$, a globální minimum na G je $f(-1,0)=f(1,0)=-1$

A odtud máme otázky:

1) kdy f nabývá na $G \subset R^2$ (obecně $G \subset R^n$) globálních extrémů?
2) jak extrémy najít, když problém nebude tak „průhledný“ jako v uvedených příkladech?

Jediné, co „víme“ (srovnejte s funkcemi jedné proměnné)

1. Věta: Je-li f funkce spojitá na $G \subset R^n$, G kompaktní množina, pak f nabývá na G globálního maxima i globálního minima.

(připomenutí – $G \subset R^n$ je kompaktní, je-li omezená a uzavřená)

2. (?) Jak „najít“ globální extrémy funkce více proměnných?

Připomeňme, co víme z MA1:

globální extrém funkce jedné proměnné mohl být tam, kde f měla také lokální extrém nebo v hraničních bodech intervalů, pokud tyto body patřily "do množiny, ve které jsme extrémy vyšetřovali (tj. definiční obor)

U funkcí více proměnných –

lokální extrémy – asi „podobně“ jako v MA1, ale hranice množiny, kde funkci vyšetřujeme – asi „horší“ !

Zkusme to na příkladu posledním – zatím jen na hranici G, lokální extrémy budeme definovat a „zkoumat“ za chvíli:

$f(x,y) = y^2 - x^2$, $G = \{ (x,y);\ x^2+y^2 \leq 1 \}$

1) G je množina omezená a uzavřená, tedy kompaktní.
f je funkce spojitá na G } ⇒

f na G nabývá svých globálních extrémů

2) na hranici $\partial G = \{ [x,y];\ x^2+y^2 = 1 \}$:
zde uvažuj funkce $f(x,y)$ není funkce dvou „nezávislých" proměnných,
ale proměnné x, y jsou zde „svázány" – jedna
proměnná závisí na té „druhé";

$$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

a tedy f na hranici bude fce jedné proměnné :

$$f(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial G} = g(x) = (1-x^2) - x^2 = 1-2x^2,\ x \in \langle -1,1 \rangle ,$$

a tedy vyšetříme extrémy funkce $g(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle -1,1 \rangle$ (a to už „umíme") :

1) $g(1) = g(-1) = -1$ – podezřelé" body z extrému
" jsou „krajní" body $x = \pm 1$

2) v $(-1,1)$: $g'(x) = -4x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ –
– tj. další podezřelý bod je stacionární bod fce g ,
a $g(0) = 1$

Tedy, u funkce $f(x,y)$ jsou z extrému „podezřelé" body ! $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$: $[1,0]$, $[-1,0]$
$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$: $[0,1]$; $[0,-1]$

a $f(1,0) = f(-1,0) = -1$? globální minimum
$f(0,1) = f(0,-1) = 1$? globální maximum

Tedy se shodujeme s „naším pohledem" na danou funkci dříve, jen ještě je třeba ukázat, že v $G^0 = \{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$ není žádný další lokální extrém, který by pak mohl být i extrémem globálním – a máme další problém:

Body lokálního extrému funkce $f(x,y)$ a jak je najít?

Definice: (analogická k „funkcím jedné proměnné") (v R^n obecně)

$f: G \subset R^n \to R$, $X_0 \in G^0$ (tj. X_0 je vnitřní bod G):

f má v bodě X_0 lokální maximum (resp. lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum), jestliže existuje okolí bodu X_0, $\mathcal{U}(X_0) \subset G$ tak, že platí:

$$\forall X \in \mathcal{U}(X_0):\ f(X) \leqq f(X_0)\ (\text{resp. } f(X) \geqq f(X_0)),\ \text{resp.}$$

ex. $P(X_0)$ tak, že platí:

$$\forall X \in P(X_0):\ f(X) < f(X_0)\ (\text{resp. } f(X) > f(X_0)).$$

Jak najít body lokálního extrému funkce f?

(1) ? kritické body pro lokální extrém $f: G \subset R^n \to R$:

(tj. body „podezřelé" z lokálního extrému)

(2) jak vyřešit „situaci" v kritických bodech?

Začneme (1):

připomenutí z MA1 (fce jedné proměnné) – kritické body:

(i) body nespojitosti fce

(ii) body, kde f neměla derivaci

(iii) body, kde f měla derivaci nulovou

(zde „nemusel" být extrém, ale: $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ nemá v x_0 lok. extrém)

<u>a u $f: G^0 \subset R^n \to R$:</u> kritické body pro lokální extrémy:

(i) body nespojitosti funkce
(příklad: $f(x,y)=0$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=1$)

(ii) body, kde neexistuje některá z parciálních derivací funkce
(příklad: $f(x,y)=|xy|$ – neostré minimum v bodech $(x,0)$ (i globální),
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje)

(iii) body, kde jsou všechny parciální derivace funkce nulové;
tj. body $X_0 \in G^0$ takové, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)=0$, $i=1,2,\dots n$
(tj. $\nabla f(X_0)=\vec{0}$) – <u>X_0 opět se nazývá stacionární bod</u>

Nebol' platí (analogie opět s MA1)
<u>Věta (nutná podmínka lokálního extrému)</u>

Nechť $f: G \subset R^n \to R$, $f \in C^{(1)}(G)$, G - otevřená množina;
Jestliže f má v bodě $X_0 \in G$ lokální extrém, pak
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)=0$, $i=1,2,\dots,n$.

<u>Naznačení důkazu</u> (pro pochopení korektní věty):
kdyby $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\neq 0$ pro „nějaké" j, pak by funkce jedné proměnné $g(x_j)=f(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,x_j,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)$, díky tomu, že $g'(x_j^0)\neq 0$, neměla v bodě x_j^0 lokální extrém $\Rightarrow$
$f(x_1,\dots,x_n)$ nemá v $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ lokální extrém (plyne z definice) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)=0$

A zpět k našemu příkladu:

$f(x,y) = y^2 - x^2$ na $G = \{(x,y) ; x^2+y^2 \leq 1\}$;

f jsme už vyšetřili na ∂G, zbývá $G^0 = \{(x,y); x^2+y^2 < 1\}$:

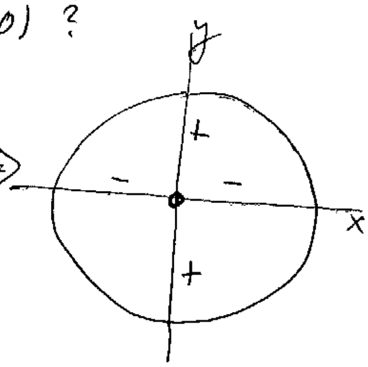
$f \in C^{(1)}(G^0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$,

tj. $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$

stacionární body: $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

A zbývá - zjistit, zda je zde lokální extrém:

zatím obecně, tedy „pokus" - jak se chová f v okolí bodu $(0,0)$?



$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=0, \quad f(x,0)<0 \text{ v libovolném } P(0,0) \\ \text{a } f(0,y)>0 \text{ v libovolném } P(0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nemá v bodě $(0,0)$ lokální extrém, tedy ani globální

(poznámka: negace „definice" lokálního extrému, tj.
f nemá v bodě $X_0 \in G^0$ lokální extrém, když platí:
$\forall\, U(X_0)\ \exists\, X_1, X_2 \in U(X_0) : f(X_1) > f(X_0) \wedge f(X_2) < f(X_0)$)

Tedy závěr příkladu:

f má na G globální extrémy na hranici ∂G, a to v bodech $[-1,0]$ a $[1,0]$ globální minimum $(=-1)$ a v bodech $[0,1]$ a $[0,-1]$ globální maximum $(=1)$, uvnitř G žádný extrém (ani lokální) funkce nemá.

A několik dalších poznámek:

1) $\nabla f(X_0) = \vec{o}$ je nutná podmínka lokálního extrému funkce f na G ($X_0 \in G^\circ$);
bod X_0, kde $\nabla f(X_0) = \vec{o}$, ale v X_0 není lokální extrém, se nazývá <u>sedlový bod funkce f</u> (asi podle „sedlové plochy" – v „našem" příkladu – asi nejjednodušší příklad – jako je zde)

2) Pokud vyšetřujeme jen globální extrémy funkce na G, pak nemusíme zjišťovat, zda v bodech „kritických" pro lokální extrém je či není lokální extrém – stačí hodnoty funkce v těchto bodech a srovnat s hodnotami funkce v „podezřelých" bodech na hranici G (pokud je např. G kompaktní, nebo obsahuje některé hraniční body) nebo je třeba pak vyšetřit chování funkce v G (viz další příklady).

3) Vyšetření chování funkce $f: G \in R^n \to R$ na hranici G (v případě $\partial G \subset G$, spec. G-kompaktní) je velmi obtížné (celá teorie t.zv. „vázaných" extrémů) – my se „uskromníme" na případ $n=2$ a jednoduché vazby mezi danou funkcí a hranicí množiny G (viz náš příklad), kde to „zvládneme".

Zkusme vše shrnout ještě ve dvou příkladech!

1. $f(x,y) = x^2+y^2-2y$ a) $G_1 = R^2$
b) $G_2 = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$

a) globální extrémy: v R^2:
(pomocí „řešení")

$$\left.\begin{array}{l} f(x,0) = x^2 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nemá v } R^2 \text{ glob. maximum}$$

globální minimum? vidíme:

$$f(x,y) \geqq f(0,y) = y^2-2y = (y-1)^2-1 \geqq -1$$

a pro $y=1$ je „zde" minimum, tj.
globální minimum f je v bodě $(0,1)$, $f(0,1)=-1$

a „ověření podmínek" pro lokální extrém (cvičně – v bodech v R^2, kde je glob. minimum, je i minimum lokální)

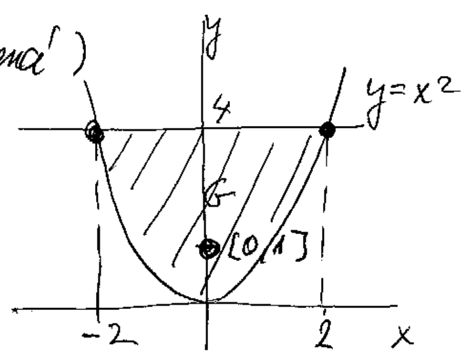
$\nabla f(x,y) = (2x, 2y-2)$, tj. $\nabla f(x,y) = \vec{o} \Leftrightarrow (x,y) = (0,1)$

– „vyšlo"!

Zároveň odtud plyne, že už žádný bod lokálního extrému (a tedy ani globálního) funkce nemá.

A zatím v těchto jednodušších příkladech nám stačí „zdravý rozum" – obecně obtížné (my budeme řešit příklady jednoduché)

b) G_2 – kompaktní množina (uzavřená a omezená)



f je spojitá na G, tedy f nabývá na G svých globálních extrémů –

(i) globální minimum je nutně v $(0,1) \in G$
(protože je to minimum v R^2!)

další lokální extrémy funkce f už nemá (v R^2), tedy z toho plyne, že globální maximum na G_2 bude mít f na hranici G_2, což je: $\partial G_2 = \omega_1 \cup \omega_2$,

$\omega_1 = \{(x,y);\ y = x^2,\ x \in \langle -2,2 \rangle\}$ a

$\omega_2 = \{(x,y);\ y = 4,\ x \in (-2,2)\}$:

$\underline{\omega_1 :\quad f(x,y) = f(x,x^2) = x^2 + x^4 - 2x^2 = x^4 - x^2 = g(x)}$

$\underline{x \in \langle -2,2 \rangle :}\quad g(-2) = g(2) = \underline{12} = f(-2,4) = f(2,4)$

$x \in (-2,2)$, $g'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$,

tj. $g'(x) = 0 \iff x_1 = 0 \ \vee\ x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in (-2,2)$

a odtud body „podezřelé" z globálního maxima jsou $(y = x^2)$
$(x_1,y_1) = (0,0)$, $(x_2,y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $(x_3,y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ a
$\underline{f(0,0) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$

$\underline{\omega_2 :}\quad f(x,y) = f(x,4) = x^2 + 8$, $x \in (-2,2)$

vyšetříme fci jedné proměnné $\underline{h(x) = x^2 + 8,\ x \in (-2,2)}$:

$h'(x) = 2x$, $h'(x) = 0 \iff x = 0$, tj. bod podezřelý je $[0,4]$, a $f(0,4) = 8$

Tedy, na hranici je maximum v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$, a to $f(-2,4) = f(2,4) = 12$, a zároveň je zde globální maximum fce f na G_2 (viz předchozí úvahy)

Poznámka: Možná, že někdo z vás ihned globální maximum „viděl": když funkci f zapíšeme (hodilo se u G_1)

$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$, pak je „vidět", že maximum f bude tam „kde je maximální $\underline{x}^2$ a $\underline{y}$ pro body z G_2, a to je (viz „obrázek" na začátku příkladu) $x = \pm 2$ a $y = 4$!

2. příklad: $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, $G = R^2$

vyšetření globálních i lokálních extrémů

a) globální extrémy – i když je f spojitá v R^2, o extrémech zatím nic nevíme, neboť R^2 není kompaktní množina

zkusme „řezy":

$f(x,0) = x^3$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty \Rightarrow$

f nemá v R^2 globální maximum ani globální minimum

b) lokální extrémy – pokud chceme vyšetřit lokální extrémy, tak zatím jen víme, jak najít kritické body pro lokální extrém: $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 6y, 24y^2 - 6x)$ a

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 2y = 0 \\ \wedge\ 4y^2 - x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x=0 & \vee\ x=1 \\ y=0 & \ \ \ y=\frac{1}{2} \end{array}$$

(eliminace: $x = x^4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$)

Stacionární body jsou: $[0,0]$ a $[1,\frac{1}{2}]$

v $(0,0)$: $f(x,0) = x^3+5$, a tedy v $[0,0]$ není lokální extrém, neboť: $f(0,0)=5$ a $f(x,0) > 5$ pro $x>0$, $f(x,0) < 5$ pro $x<0$

Ale zatím neumíme zjistit, zda stacionární bod $(1, \frac{1}{2})$ je bodem lokálního extrému naší funkce – a tedy je před námi

„Poslední část vyšetřování extrémů funkce více proměnných – vyšetření, zda ve stacionárních bodech lokální extrém je, či není."

Připomenutí MA1 – funkce jedné proměnné:

1) tedy: $f'(x_0) = 0$, zjistili jsme chování „$f'(x)$ v okolí bodu x_0, tedy: $f'(x)$ měnila v bodě x_0 „znaménko", pak v bodě x_0 byl lokální extrém;

nebo

2) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ v bodě x_0 je ostré lokální minimum

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ v bodě x_0 je ostré lokální maximum

2. proč – lokální extrém v bodě x_0 lze vyšetřit pomocí přírůstku fce (a to i u funkcí více proměnných):

$f: G \subset R^n \to R$, $\quad X_0 \in G^0$, pak v X_0 je

lokální maximum, tedy: $f(X) - f(X_0) \leqq 0$ v $\mathcal{U}(X_0)$;

lokální minimum, tedy: $f(X) - f(X_0) \geqq 0$ v $\mathcal{U}(X_0)$;

ostré lokální maximum, tedy: $f(X) - f(X_0) < 0$ v $P(X_0)$;

ostré lokální minimum, tedy: $f(X) - f(X_0) > 0$ v $P(X_0)$.

Pro $n = 1$ (ZS, MA1): x_0 je-li stacionární bod a ex.-li $f''(x_0)$, pak (užití Taylorova polynomu):

$$f(X) - f(X_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(X - x_0)^2 + \omega_2(X - x_0),$$

neboť $f'(x_0) = 0$ pro stac. bod, a $\lim\limits_{X \to x_0} \frac{\omega(X - x_0)}{(X - x_0)^2} = 0$, tedy, pro $x-x_0 \to 0$ je chyba $\omega_2(x-x_0)$ „každé menší než“ $(x-x_0)^2$

a pro $f''(x_0) \neq 0$ bude ve výrazu (pro $(x-x_0)$ „dosti malé“)

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \omega_2(x-x_0)$$

bude o znaménku „rozhodovat“ $f''(x_0)$, a přírůstek bude mít stejné znaménko (v malém okolí bodu x_0) jako $f''(x_0)$.

Je-li $f''(x_0)=0$, nic „nevíme“ - znaménko df neznáme (a asi bychom užili Taylorův polynom vyššího stupně)

<u>a jak „vytvoříme“ analogii pro více proměnných?</u>

<u>Ukážeme si to pro $n=2$</u> (pro $n \geq 3$ je vysvětlení náročnější, neznáme potřebné znalosti z LA)

<u>pro $n=1$</u> je $f''(x_0)(x-x_0)^2$ t.zv. druhý diferenciál f v bodě x_0 (a přírůstku $(x-x_0)$)

označme $x-x_0=h$, pak $df(x_0)(h) = f'(x_0).h$ a

druhý diferenciál je $\underline{d^2f(x_0)(h)} = d\,(f'(x)(h))(h)\Big|_{x=x_0} = \underline{f''(x_0)\cdot h^2}$

<u>pro $n=2$:</u> předpokládejme $f \in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$ (a značme $dx=h, dy=k$)

pak $df(x_0,y_0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).k$, a definujeme

pak $d^2f(x_0,y_0)(h,k) \underset{def.}{=} d\,(df(x,y)(h,k)))(h,k)\Big|_{(x_0,y_0)}$; tedy

$$d^2f(x,y)(h,k) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k\right)h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k\right)k =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h.k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)k^2$$

(neboť $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ dle předpokladu v $\mathcal{U}(x_0,y_0)$)

Máme tedy v bodě (x_0,y_0): druhý diferenciál (nebo diferenciál 2. řádu):

$$d^2f(x_0,y_0)(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)h.k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).k^2$$

(pro zjednodušení – dobře se pamatuje:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2(f)$$ (u derivace místo "mocniny" je odpovídající derivace 2. řádu)

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h.k + \frac{\partial^2}{\partial y^2}k^2\right)(f)$$ (píše se tak jako „operátor")

tedy: $$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$)

A pak platí (uvedeme si bez důkazu)

Věta: Je-li $f \in C^{(2)}(U(x_0,y_0))$, pak

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) \quad (*)$$
$$+R_2(x-x_0,y-y_0),$$

kde $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x-x_0,y-y_0)}{\|((x-x_0),(y-y_0))\|^2} = 0$$

Polynom ve dvou proměnných (x,y)

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)$$

je Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0),

$R_2(x-x_0,y-y_0)$ – opět se nazývá zbytkem v Taylorově vzorci $(*)$

Poznámka:

1) Je-li $f \in C^{(n)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$, lze definovat diferenciály až do n-tého řádu:

Je-li definován $d^{k-1}(x_0,y_0)(h,k)$, pak

$$d^k(x_0,y_0)(h,k) = d\left(d^{k-1}(x,y)(h,k)\right)\Big|_{(x_0,y_0)}(h,k) \quad ;$$

2) a platí věta o Taylorově polynomu n-tého stupně funkce f v bodě (x_0,y_0):

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x-x_0,y-y_0), \text{ kde}$$

$$T_n(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) \quad \text{a}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_n(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,\,y-y_0)\|^n} = 0$$

Podobně lze definovat diferenciály vyšších řádů i pro funkce n-proměnných ($n \geq 3$) a platí i analogická věta o Taylorovu polynomu – nebudeme „probírat“, zůstaneme u $n=2$ (jak jsme již uváděli dříve – jednodušší).

A nyní zpět k vyšetřování lokálních extrémů fce $f(x,y)$:

A jak (?) – pomůže nám někdy právě $T_2(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) – stacionárním bodě funkce f, tj. „pomůže“ $d^2f(x_0,y_0)$:

Je-li bod (x_0,y_0) stacionární bod funkce $f(x,y)$ $\left(f \in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))\right)$, pak $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{o}$ a tedy $df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) = 0$, a v $\mathcal{U}(x_0,y_0)$ přírůstek je vyjádřen

$$(*) \quad f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) + R_2(x-x_0, y-y_0)$$

Označme pro zjednodušení „pohledu" $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$;
jak už bylo poznamenáno dříve, lokální extrém funkce f v (x_0,y_0) „poznáme" podle toho, zda v nějakém (třeba malém) okolí $\mathcal{U}(x_0,y_0)$ (resp. $P(x_0,y_0)$ pro ostrý lokální extrém) „nemění" přírůstek f znaménko. Z výrazu $(*)$ pro přírůstek f je „vidět", že nejsilněji rozhodne $d^2f(x_0,y_0)$ – například, tedy bude v $P(x_0,y_0)$ $d^2f(x_0,y_0) > 0$, tak, bude-li $P(x_0,y_0)$ dostatečně malé, chyba bude „zřejmě" menší než $d^2f(x_0,y_0)$ a tak asi „vyhraje" znaménko diferenciálu a přírůstek bude v $P(x_0,y_0)$ kladný, tj. v (x_0,y_0) bude mít $f(x,y)$ ostré lokální minimum (a asi si to umíte představit i s obráceným znaménkem). A uvidíme, že pokud nebude mít $d^2f(x_0,y_0)$ „stálé" znaménko v „žádném" okolí $P(x_0,y_0)$, pak f nebude mít v (x_0,y_0) lokální extrém. Ukažme si:

Pro zjednodušení (další) zavedeme označení $\left(f \in C^2(\mathcal{U}(x_0,y_0))\right)$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),\quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

a ponechme $h = x - x_0$, $k = y - y_0$:

Pak $d^2f(x_0,y_0)(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2 \quad (= Q(h,k))$

– tento výraz se nazývá kvadratická forma (ve dvou proměnných)
(a zpravidla značí $Q(h,k)$)

A nyní o „znaménku" $Q(h,k)$: { Pro zájemce "odvození", ale potřebujeme až výsledek – stačí.

1) znaménko formy $Q(h,k)$ nezávisí na velikosti vektoru (h,k):

$\lambda \neq 0: \; Q(\lambda h, \lambda k) = \lambda^2 Q(h,k)$

2) Definice (pro snazší vyjádření vlastností $Q(h,k)$, které potřebujeme pro vyšetření lokálních extrémů)

$Q(h,k)$ je

(1) pozitivně definitní, když : $\forall (h,k) \neq (0,0)$ je $Q(h,k) > 0$

(2) negativně definitní, když : $\forall (h,k) \neq (0,0)$ je $Q(h,k) < 0$

(3) indefinitní, když $\exists (h_1,k_1);\; Q(h_1,k_1) > 0$
a $\exists (h_2,k_2):\; Q(h_2,k_2) < 0$

(4) pozitivně semidefinitní $\forall (h,k) : Q(h,k) \geq 0$
negativně semidefinitní $\forall (h,k) \quad Q(h,k) \leq 0$
a pro nějaké $(\bar{h},\bar{k}) \neq (0,0)$ je $Q(\bar{h},\bar{k}) = 0$

Příklady kvadratických forem:

(1) $Q(h,k) = h^2 + 3k^2$ – pozitivně definitní

(2) $Q(h,k) = -h^2 - 3k^2$ – negativně definitní

(3) $Q(h,k) = 3h \cdot k$ – indefinitní, neboť
$Q(1,1) = 3,\ Q(1,-1) = -3$

$Q(h,k) = h^2 - k^2$ – indefinitní, neboť
$Q(1,0) = 1 > 0,\ Q(0,1) = -1 < 0$

(4) $Q(h,k) = h^2$ – pozitivně definitní, neboť
$Q(h,k) = h^2 \geqq 0 \quad \forall (h,k)$, ale
$Q(0,k) = 0$ pro $\forall k \in R$

(5) $Q(h,k) = h^2 - 4hk + 3k^2$ – ? „nevidíme" – vyzkoušíme:

<u>Jak zjistíme, jak se „chová" kvadratická forma?</u>
<u>Pro $n = 2$</u> (pro $n \geqq 3$ jsou výsledky těžší známé, viz literatura – LA – ale zůstaneme u toho nejjednoduššího případu $n = 2$)

Máme-li $Q(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2$, vhodně upravíme:

1) <u>je-li $a_{11} \neq 0$:</u>

$$Q(h,k) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2h^2 + 2a_{12}a_{11}hk + a_{11}a_{22}k^2\right) = \text{(doplnění „na čtverec")}$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left[(a_{11}h + a_{12}k)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^2\right] \quad (*)$$

Když označíme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ (A – symetrická matice), matice kvadratické formy Q

pak $Q(h,k) = (h,k)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

a vidíme, že v $(*)$ je u k^2 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

A z (*) má pak snadno dostaneme:

(1) $\det A > 0 \Rightarrow Q(h,k)$ je positivně definitní pro $a_{11} > 0$
a negativně definitní pro $a_{11} < 0$

(2) $\det A < 0 \Rightarrow Q(h,k)$ je indefinitní

(3) $\det A = 0 \Rightarrow Q(h,k)$ je semidefinitní

Zdůvodnění, proč:

(1) $(a_{11}h + a_{12}k)^2 \geqq 0$, tedy, je-li $k \neq 0$ a $\det A > 0$, je
$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^2 > 0 \Rightarrow Q(h,k) > 0$ (pro $a_{11} > 0$) nebo
a $Q(h,k) < 0$ (pro $a_{11} < 0$)
a pro $k = 0$ je $h \neq 0$ (neboť $(h,k) \neq 0$), a pak $(a_{11}h)^2 > 0$;

(2) předpokládejme $a_{11} > 0$ (pro $a_{11} < 0$ analogicky): pro $h \neq 0$ je
$Q(h,0) = \frac{1}{a_{11}} \cdot (a_{11}h)^2 > 0$, ale zvolíme-li $(\bar{h}, \bar{k})$ takový,
že $\bar{k} \neq 0$ a $a_{11}\bar{h} + a_{12}\bar{k} = 0$, pak $Q(\bar{h},\bar{k}) = \frac{1}{a_{11}} \det A \cdot \bar{k}^2 < 0$ –
– tedy Q je indefinitní forma;

(3) $\det A = 0$, pak $Q(h,k) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}h + a_{12}k)^2$ a díky $a_{11} \neq 0$
lze najít vektor $(\bar{h},\bar{k}) \neq (0,0)$ tak, že $a_{11}\bar{h} + a_{12}\bar{k} = 0$,
tj. $Q(\bar{h},\bar{k}) = 0$, a $Q(h,k) \geqq 0$ pro $a_{11} > 0$
nebo $Q(h,k) \leqq 0$ pro $a_{11} < 0$, tedy $Q(h,k)$ je
semidefinitní forma.

<u>A dále:</u>

2) <u>$a_{11}=0,\ a_{22}=0,\ a_{12}\neq 0$:</u>

$Q(h,k) = 2a_{12}hk$ – tedy $Q(h,k)$ je indefinitní forma (viz příklad (3))

3) <u>$a_{11}=0,\ a_{22}\neq 0$:</u>

$$Q(h,k) = 2a_{12}hk + a_{22}k^2 = \frac{1}{a_{22}}\left[(a_{12}h + a_{22}k)^2 - a_{12}^2h^2\right],$$

tedy $Q(h,k)$ je indefinitní pro $a_{12}\neq 0$ a
$Q(h,k)$ je semidefinitní pro $a_{12}=0$

(neboť: $a_{12}\neq 0$: $Q(0,k)\geqq 0$ pro $a_{22}>0$ a $Q(0,k)\leqq 0$ ($a_{22}<0$)
$a_{12}=0$: $Q(h,k)\geqq 0$ pro $a_{22}>0$, nebo $Q(h,k)\leqq 0$ ($a_{22}<0$),
ale existuje ($a_{22}\neq 0$) vektor $(\bar{h},\bar{k})\neq(0,0)$ tak, že $a_{12}\bar{h}+a_{22}\bar{k}=0$, tj. $Q(\bar{h},\bar{k})=0$)

<u>A nyní souvislost vlastností kvadratické formy $Q(h,k)$ s nalezením lokálních extrémů funkce dvou proměnných (ve stacionárním bodu)</u>

<u>Platí:</u> $f\in C^{(2)}(U(x_0,y_0))$, (x_0,y_0) je stacionární bod:

1) <u>je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ positivně definitní forma</u>, pak ($f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$ v $P(x_0,y_0)$ a) f má v bodě (x_0,y_0) <u>ostré lokální minimum</u>;

2) <u>je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ negativně definitní forma</u>, pak má f v bodě (x_0,y_0) <u>ostré lokální maximum</u>;

3) je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ indefinitní forma, pak f nemá v bodě (x_0,y_0) lokální extrém;

4) je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ semidefinitní (positivně, resp. negativně), nemůžeme nic říci (zde tam, kde $d^2f(x_0,y_0)(h,k)=0$ pro $(h,k)\neq(0,0)$ o průběhu „rozhoduje chyba" – a jejíž znaménko neznáme)

A souvislost s obecnými výsledky pro $Q(h,k) = d^2f(x_0,y_0)(h,k)$: Matice této kvadratické formy je (viz význam a_{11}, a_{22}, a_{12}) t.zv. Hessova matice a její determinant (důležitý pro rozhodnutí o extrémech je t.zv. Hessián:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

a pro $f\in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$.

A platí:

Věta: 1) $H_f(x_0,y_0)>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$ $\left(\Rightarrow \text{i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)>0\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ má v bodě (x_0,y_0) ostré lokální minimum

2) $H_f(x_0,y_0)>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$ $\left(\Rightarrow \text{i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)<0\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ má v bodě (x_0,y_0) ostré lokální maximum

3) $H_f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow f$ nemá v bodě (x_0,y_0) lokální extrém
($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, pokud jsou nenulové, mají opačná znaménka)

4) $H_f(x_0,y_0) = 0$ – „nelze nic říci"

Může třeba pomoci „grafická" představa:

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ oba „řezy" rovinami $x = x_0$, $y = y_0$ jsou „$\cup$" (tedy lokální minimum)

2) podobně pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) < 0$ – pak oba „řezy" grafu f jsou $\cap$ (tedy lokální maximum)

3) jsou-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \neq 0$ a opačných znamének, pak řezy grafu jsou: $\cup$ a $\cap$ – – tj. zde je „sedlový bod" – není zde lokální extrém

! A poznámka pro „čtenáře" – pro úspěch u zkoušky (a snad i u zápočtu) stačí tento předchozí výsledek – „souvislost lokálního extrému a Hessiánu" – a předchozí výklad celý je zde pro (úplnost a) zájemce (ale může se někdy v aplikacích hodit)

A nyní jsme konečně schopni (snad) dokončit příklad 2:
(strana 13 „předkapitoly")

Vyšetřovali jsme extrémy funkce
$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5 \quad \text{v } R^2,$$
a zůstal nám problémek – stacionární bod $(1, \frac{1}{2})$:

A tak:
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x, & -6 \\ -6, & 48y \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & 8y \end{vmatrix} = 36(8xy-1)$$

1) vyzkoušejme i bod $(0,0)$ (též stacionární), ale zde se nám „povedlo" rozumným „pohledem" na danou funkci ukázat, že v $(0,0)$ nemá f lokální extrém – a „početně" (mechanicky)
$$H(0,0) = -36 < 0 \Rightarrow \text{v } (0,0) \text{ není lokální extrém}$$
(asi jednodušší)

2) $H(1, \frac{1}{2}) = 36(8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 36 \cdot 3 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ v bodě $(1, \frac{1}{2})$ má fce f ostrý lokální extrém,
a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0 \Rightarrow$ v bodě $(1, \frac{1}{2})$ má f ostré lokální minimum

A ukažme si ještě další příklady:

Příklad 3 $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$, $G = R^2$

1) globální extrémy:

$f(x,x) = (x-1)^3$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-1)^3 = \pm\infty \Rightarrow$ f nemá v R^2 globální extrémy

2) lokální extrémy:

$$\nabla f(x,y) = \left(2(x-y) ; -2(x-y) + 3(y-1)^2 \right)$$

stacionární body : $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff$ (1) $x = y$

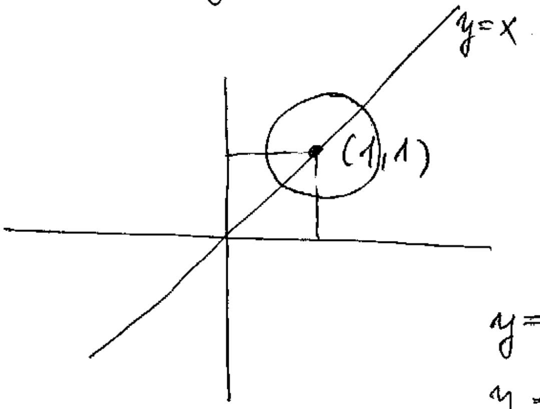
(2) $-2(x-y) + 3(y-1)^2 = 0$

($\iff$ $y=1$ a $x=1$, tj: jediný stac. bod je

$(x_0,y_0) = (1,1)$: $H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2 , & -2 \\ -2 , & 2+6(y-1) \end{vmatrix}$)

$$H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; -$$

tedy zde nám Hessián „nepomůže" – „podívejme se" :



V libovolném okolí $O(1,1)$ jsou body , kde $y=x$ (viz představa na obrázku) , a pro

$y=x$, $x>1$ je $f(x,x) = (x-1)^3 > 0$

$y=x$, $x<1$ je $f(x,x) = (x-1)^3 < 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$f(1,1) = 0$

$\Rightarrow$ f nemá v bodě (1,1) lokální extrém

(je to „sedlový" bod)

Příklad 4 $\quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2)\ ,\ G = \mathbb{R}^2$

Z vlastností funkce „sinus" a z naší „představy" grafu f (rotační plocha) vidíme hned:

1) f má neostrá globální maxima $(=1)$ v bodech, pro které je
$$x^2+y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0,1,2\dots \quad (\text{kružnice o středu v } (0,0))$$

2) f má neostrá globální minima $(=-1)$ v bodech, pro které je
$$x^2+y^2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0,1,2\dots \quad (\quad -"- \quad)$$

Pro body v 1) a 2) nemělo Hessián fungovat – dává výsledky jen pro „ostré" extrémy – vyzkoušejte, že pro body (x,y) z 1) i 2) je $H(x,y) = 0$

Ale ještě jsme nevyšetřovali, zda není další stacionární bod:

$\nabla f(x,y) = \cos(x^2+y^2)\,(2x, 2y)$, tj.

$\nabla f(x,y) = (0,0)$ ještě pro bod $(x_0,y_0) = (0,0)$:

$f(0,0) = \sin(0) = 0$, a $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) > 0$ pro
$$0 < x^2+y^2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ v bodě $(x_0,y_0) = (0,0)$ je ostré lokální minimum,

a kdyby si „dále prací" s Hessiánem (tj. s „druhými" derivacemi funkce f), pak vyjde (a zkuste si to):

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (dle věty o lokálních extrémech) v bodě $(0,0)$ má f ostré lokální minimum (už víme).

A nyní řešení dvou úvodních problémů:

1) Máme najít rozměry hranolu – vany – daného objemu V tak, aby povrch (bez víka) vany byl minimální.

Jsou-li a, b, c (>0) rozměry vany, pak (V-objem, S-povrch)

$$V = abc \qquad a \qquad S = ab + 2(ac + bc)$$

(c – volíme jako „výšku")

Z V tedy: $c = \frac{V}{ab}$, pak $S(a,b) = ab + 2V\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

(na přechod)

A máme vyřešit globální minimum funkce $S(a,b)$ na množině $G = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$

(i) $S(a,b)$ je spojitá fce, ale G není kompaktní množina, tedy větu o existenci globálních extrémů použít nemůžeme, ale:

$$\lim_{\substack{a\to+\infty,\ b>0 \\ (b\to+\infty,\ a>0)}} S(a,b) = +\infty, \quad \lim_{\substack{a\to 0+,\ b>0 \\ (b\to 0+,\ a>0)}} S(a,b) = +\infty, \quad S(a,b) > 0,$$

tedy minimum bude (asi) existovat – kde?

(ii) hledáme kritické body pro lokální extrém (v G)

$$\nabla S(a,b) = \left(b - \frac{2V}{a^2},\ a - \frac{2V}{b^2}\right), \text{ pak}$$

$$\nabla S(a,b) = (0,0) \iff 2V = ba^2 \ \wedge\ 2V = ab^2, \text{ tj.}$$

$$ab^2 = a^2b \iff a = b \ (a>0, b>0)$$

$$\text{pak } a^3 = 2V, \text{ tj. } a = b = \sqrt[3]{2V}$$

$$\text{a } c = \frac{V}{ab} = \frac{V}{\sqrt[3]{(2V)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \qquad \left(\text{pak } a.b.c = \sqrt[3]{4V^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{4}} = V\right)$$

mělo by zde být lokální a tedy dle „našich představ" i globální minimum:

<u>Potvrzení lokálního minima:</u>

$$H\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{vmatrix} \frac{4V}{a^3}, & 1 \\ 1, & \frac{4V}{b^3} \end{vmatrix}_{\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)} = 3 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) > 0$$

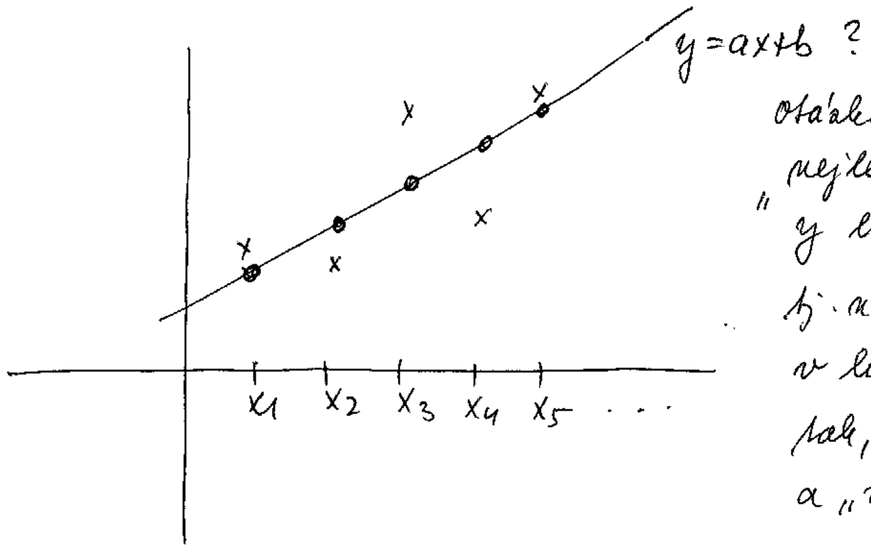
$\Rightarrow$ v bodě $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ je ostré lokální (a tedy i globální) minimum.

A minimální povrch (bez víka) je (ale raději „přepočítejte"):

$$\underline{S_{min} = 3\sqrt[3]{4V^2}.}$$

2. <u>Metoda „nejmenších čtverců"</u>

měří se opakovaně veličina $y = y(x)$, o které předpokládáme, že $y(x) = ax + b$ (tj. že y „závisí lineárně na x") –
– měříme pro $x_1, .., x_n$, $x_i \neq x_j$, naměřené hodnoty y pro x_i označme y_i – graficky (na začátku „přednášky")



Otázka byla, jak najít „nejlepší aproximaci veličiny y lineární závislostí", tj. najít koeficienty a, b v lineární funkci $y = ax + b$ tak, aby naměřené hodnoty a „vypočítané" hodnoty byly „co nejblíže"

Metoda „nejmenších čtverců" (zde kvadrátů) spočívá v tom, že hledáme takovou lineární funkci $y = ax+b$, aby pro naměřené hodnoty y_i (odpovídající „volbě" x_i) a vypočtené hodnoty $y_i^* = ax_i + b_i$ (vypočtené hodnoty značíme y_i^*) platilo, že

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 \quad (*)$$

je minimální (součet kvadrátů rozdílu naměřených hodnot a vypočtených pro $x = x_i$).

Kdybychom n-tici naměřenou $(y_1, \dots, y_n) = Y \in R^n$ a n-tici vypočtenou $(y_1^*, \dots, y_n^*) = Y^*$ brali jako body z R^n, pak výraz v $(*)$ je $d_n^2(Y, Y^*)$ (tj. kvadrát vzdálenosti (Euklidovské) bodů Y, Y^*, tj. hledáme a, b v lineární funkci tak, aby „body naměřené" a „vypočtené" byly sobě nejblíže – v R^n s Euklidovskou vzdáleností.

Tedy: formulace úlohy – hledáme globální minimum funkce

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \quad v \ R^2$$

($x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_n$ jsou dané hodnoty – změřené)

„situace": $f(a,b)$ je funkce spojitá a nezáporná v R^2, a když „půjdeme" cestami (a, ka), $k \in R$ k „∞", tj. $a \to \infty$, pak

$$\lim_{a\to\infty} f(a, ka) = \lim_{a\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a(x_i + k) - y_i)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow$ intuice říká (odpovídá našim znalostem), že (asi) taková funkce $f(a,b)$ globální minimum má

A kde? Hledáme stacionární body funkce $f(a,b)$, tj. body, kde $\nabla f(a,b) = (0,0)$, tedy máme řešit soustavu rovnic

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \right) \quad 2 \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i) x_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \right) \quad 2 \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i) = 0$$

A po úpravě dostaneme soustavu rovnic (lineárních) pro a, b:

$$(**) \quad \begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a \sum x_i + n b = \sum y_i \end{cases}$$

Determinant soustavy je $D = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$,

a dá se ukázat, že $D \neq 0$ (dokonce je $D > 0$), tedy soustava $(**)$ má právě jedno řešení $(\bar{a}, \bar{b})$, je-li $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

A ptáme-li se, zda je zde lokální minimum, a tedy zřejmě (dle úvahy dříve) i globální – vyšetříme Hessián v $(\bar{a}, \bar{b})$:

Ale vidíme, že

$$H(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{vmatrix} 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 , & 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2 \sum_{i=1}^{n} x_i , & 2n \end{vmatrix} = 4D > 0 \text{, také } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0 \right)$$

v bodě $(\bar{a}, \bar{b})$ má f ostré lokální (a tedy i globální) minimum.

(„řešení" $\bar{a}, \bar{b}$ si můžete spočítat)

A na závěr této „obsáhlé" přednášky:

Pro zájemce (opět nepovinný) důkaz toho, že $D > 0$, platí-li $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$; $j, i = 1, 2, \dots n$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \underset{\text{pro } x_i \neq x_j}{<} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i^2 + x_j^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} n x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} n x_j^2\right) =$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,, \quad \text{tedy (shrnuto):}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \underline{D = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0}$$